

作业二：汪敏 11210180063

1、 甲乙两个赌徒进行赌博。甲乙各带了 a 元和 b 元钱来参加赌博。中间不容许借钱（自融资），赌博到某人输光即止，对于每局，甲赢的概率是 p ，乙赢的概率是 $q(q=1-p)$ 。问甲输光的概率是多少。

解：设函数 $P(x)$ 表示如果甲手中有 x 元钱甲会输光的概率。那么，我们对第一局进行分析，有 q 的概率变成手中 0 元，有 p 的概率手中 2 元，即有：

$$P(1) = q \times P(0) + p \times P(2)$$

$$\text{化简得： } P(2) - P(1) = \frac{q}{p}(P(1) - P(0))$$

同理，我们有：

$$P(3) - P(2) = \frac{q}{p}(P(2) - P(1))$$

.....

$$P(m+n) - P(m+n-1) = \frac{q}{p}(P(m+n-1) - P(m+n-2))$$

将上面的式子相加得：

$$P(m+n) - P(1) = \left[\frac{q}{p} + \left(\frac{q}{p}\right)^2 + \dots + \left(\frac{q}{p}\right)^{m+n-1} \right] \times (P(1) - P(0))$$

又： $P(0) = 1, P(m+n) = 0$

$$\text{所以有： } P(1) = \frac{\frac{q}{p} - \left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}$$

同样，有 $P(a) - P(1) = \left[\frac{q}{p} + \left(\frac{q}{p}\right)^2 + \dots + \left(\frac{q}{p}\right)^{a-1} \right] \times (P(1) - P(0))$

$$\text{故有： } P(a) = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^a - \left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}, \text{ 其中， } q=1-p.$$

$$\text{所以，甲输光的概率为 } P(a) = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^a - \left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}, \text{ 特殊的，当 } p=q=0.5 \text{ 时，有 } P(a) = \frac{b}{a+b}.$$

2、设有一股票现在时刻 0 的价格是 50 元，在每个时间段都以 3/4 的概率上涨 20%，以 1/4 的概率下降 20%，假设利率可以忽略，某个顾客欲在证券代理公司购买在时刻 2 到期的商定价格为 52 元的欧式看跌期权，也就是说他有在时刻 2 以 52 元的价格买个代理公司一股股票的权力，问这份股票应该卖多少钱？代理公司应该怎么投资来对冲风险，如果时刻 1 股票下跌，这份期权还值多少钱？代理公司又应该怎么操纵？

解：我们知道，利用二项期权模型定价与股票涨跌的概率无关，至于股票可能到达的概率有关。但若我们假设 $P(\xi_i = 1.2) = \frac{1-d}{u-d} = \frac{1-0.8}{1.2-0.8} = \frac{1}{2}$ ， $P(\xi_i = 0.8) = \frac{u-1}{u-d} = \frac{1.2-1}{1.2-0.8} = \frac{1}{2}$

则股票价格在 P 下成为一个鞅，到时刻 2，经过简单的概率计算，我们可以得到三种可能：股票价格 $P(S_2 = 72) = \frac{1}{4}$ ， $P(S_2 = 48) = \frac{1}{2}$ ， $P(S_2 = 32) = \frac{1}{4}$ ；

期权价值 $P(V_2 = 0) = \frac{1}{4}$ ， $P(V_2 = 4) = \frac{1}{2}$ ， $P(V_2 = 20) = \frac{1}{4}$ ，

根据定价公式 $x_0 = E(V_2) = 4 \times \frac{1}{2} + 20 \times \frac{1}{4} = 7$

所以，该期权应该卖 7 元。

到时刻 1 时，股票的价格可能分别为 60 元或者 40 元，其期权价值分别对应 2 元和 12 元。（在时刻 1 时，当股票为 60 元时，其价值有 1/2 的可能变为 0，有 1/2 的可能变为 4，故其价值为 2 元，当股票为 40 元时，分析相同）

假设时刻 0 时，代理公司投资 x 份股票，这有：

$$\phi(60) = 60x + (x_0 - 50x) = V_{2(S_1=60)} = 2$$

$$\phi(40) = 40x + (x_0 - 50x) = V_{2(S_1=40)} = 12$$

$$\text{有： } x = -0.5$$

故在时刻 0 时，该证券公司应该卖出 1/2 份股票，并将这（7+25）元存入银行。

如果在时刻 1 时，股票下跌到 40 元，根据上面的分析，期权的价值有 1/2 的可能为 4 元，有 1/2 的可能为 20 元，则这份期权还值 12 元。对于代理公司，同样的设投资 y 份股票，有：

$$\phi(48) = 48y + (x_0 - 40y) = 4$$

$$\phi(32) = 32y + (x_0 - 40y) = 20$$

$$\text{有： } y = -1$$

故若股票下跌，代理公司应该再卖出 1/2 份股票，并将这（7+25+20）元保存到银行。

这样，当时刻 2，股票上涨到 48 元时，该代理公司给顾客 4 元，并用 48 元买下 1 份股票；当时刻 2，股票下跌到 32 元时，该代理公司给顾客 20 元，并用 32 元买下 1 份股票。