1、 设 X_1，⋯， X_n 独立且服从标准正态分布，求 $Y = X_1{}^2 + \cdots + X_n{}^2$ 的密度函数。

解：因为 X_1，⋯， $X_n \overset{iid}{\sim} N(0,1)$

则 $Y = X_1{}^2 + \cdots + X_n{}^2 \sim \chi^2(n)$

有 $\chi^2(n)$ 的分布函数为：

其中，当 n=2k+1 时， $f(y) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,(2k-1)!!} y^{\frac{2k-1}{2}} e^{-\frac{y}{2}}$

当 n=2k 时， $f(y) = \dfrac{1}{2^k (k-1)!} y^{k=1} e^{-\frac{y}{2}}$

2、 证明模拟中产生的随机量 X 服从密度函数 f

解：因为随机变量 U 服从于[0，1]的均匀分布，则有 U 的分布函数为：

$$F(U) = \begin{cases} 0, & when \quad u < 0 \\ u, & when \quad 0 \le u \le 1 \\ 1, & when \quad u > 1 \end{cases}$$

又因为 $\dfrac{f(y)}{g(y)} \le c$ 恒成立，且密度函数一定非负，则可以判断：

对于所有的 y，有 $0 \le \dfrac{f(y)}{cg(y)} \le 1$

所以发生事件 $U \le f(Y)/cg(Y)$ 的概率为

$$P(U \le f(Y)/cg(Y)) = f(Y)/cg(Y)$$

对于任意得 x，X 能取其值表示第一次 Y 取 x,且恰好 $U \le f(Y)/cg(Y)$，或者 Y 前面任意取值，但是 $U > f(Y)/cg(Y)$，重复取值下去，直到 Y 取 x，恰好 $U \le f(Y)/cg(Y)$；

假设该模拟过程中 X 的密度函数为 h(x),根据上面的描述，我们可以得到：

$$h(x) = g(x)\frac{f(x)}{cg(x)} + g(x)\frac{f(x)}{cg(x)} * \sum_{i=1}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} g(y)(1-\frac{f(y)}{cg(y)})dy\right)^i$$

$$= \frac{f(x)}{c} * \sum_{i=0}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} g(y)(1-\frac{f(y)}{cg(y)})dy\right)^i$$

$$= \frac{f(x)}{c} * \sum_{i=0}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} g(y)dy - \int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(y)}{c}dy\right)^i$$

$$=\frac{f(x)}{c}*\sum_{i=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{c}\right)^{i}$$

$$=\frac{f(x)}{c}*c$$

$$=f(x)$$

所以：模拟中产生的随机量 X 服从密度函数 f

3、 如果随机变量 X 的分布函数 F 连续，证明随机变量的函数 F（X）服从[0，1]上均匀分布。

解：设 X 的密度函数为 $f(X)$，分布函数为 $F(X)$，有 $0\le F(X)\le 1$

令 $Y=F(X)$，有：

$$F(Y)=P(Y\le y)$$

$$=P(F(x)\le y)$$

我们应该注意到， x 与 F（x）并不一定是一一对应的，但是，对于每一个 y=F（x），均有一个 x 或者 x 的一个闭区间与之对应，我们定义 H(y)为 y($0\le y\le 1$)对应的这个闭区间中 x 的最大值，这样，我们有：

$$=\begin{cases}0; & y<0\\ x\le H(y); & 0\le y\le 1\\ 1; & y>1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0; & y<0\\ F(H(y)); & 0\le y\le 1\\ 1; & y>1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0; & y<0\\ y; & 0\le y\le 1\\ 1; & y>1\end{cases}$$

所以，随机变量的函数 F（X）服从[0，1]上均匀分布。