

## 第二章

1、设  $X \sim N(u, \sigma^2)$ ，用类似上面的方法计算  $E(e^{tX})$ ， $t \in R$

解：假设  $Y \sim N(0,1)$ ，那么有：

$$\begin{aligned} E(e^{tY}) &= E\left(\sum_0^{\infty} \frac{t^n}{n!} Y^n\right) \\ &= E\left(\sum_0^{\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} Y^{2n}\right) \\ &= \sum_0^{\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} E(Y^{2n}) \\ &= \sum_0^{\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} (2n-1)!! \\ &= \sum_0^{\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!!} \\ &= \sum_0^{\infty} \frac{(t^2)^n}{2^n n!} \\ &= e^{\frac{1}{2}t^2} \end{aligned}$$

因为  $X \sim N(u, \sigma^2)$ ，所以，有  $\frac{X-u}{\sigma} \sim N(0,1)$ ，那么有

$$E(e^{\frac{h(X-u)}{\sigma}}) = e^{\frac{1}{2}h^2} = E(e^{\frac{Xh}{\sigma}} / e^{\frac{uh}{\sigma}}) = E(e^{\frac{Xh}{\sigma}}) / e^{\frac{uh}{\sigma}}$$

所以有：  $E(e^{\frac{Xh}{\sigma}}) = e^{\frac{1}{2}h^2 + \frac{uh}{\sigma}}$

再令  $\frac{h}{\sigma} = t$ ，则有：  $E(e^{tX}) = e^{\frac{1}{2}t^2\sigma^2 + ut}$

2、设  $X_1, X_2$  独立且服从标准正态分布：

(1) 求  $Y = X_2 / X_1$  的密度函数

(2) 记  $X = (X_1 + X_2) / 2$ ，证明：  $X$  与  $(X_1 - X)^2 + (X_2 - X)^2$  独立

解：(1)  $X_1, X_2$  独立且服从标准正态分布，

令  $Y = X_2 / X_1$ ，有：

$$\begin{aligned}
F(Y) &= P\left(\frac{X_2}{X_1} < y\right) \\
&= 2 \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{yx_1} f(x, y) dx_2 dx_1 \\
&= 2 \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{yx_1} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}} dx_2 dx_1 \\
&= 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\arctan y} \int_0^{+\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{r^2}{2}} r dr d\theta \\
&= \frac{1}{\pi} \left( \arctan y + \frac{\pi}{2} \right)
\end{aligned}$$

$$\text{所以: } f_Y(y) = \frac{dF}{dy} = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+y^2}$$

$$(2) X = (X_1 + X_2) / 2$$

$$\begin{aligned}
(X_1 - X)^2 + (X_2 - X)^2 &= X_1^2 - 2XX_1 + X^2 + X_2^2 - 2XX_2 + X^2 \\
&= X_1^2 + X_2^2 - 2X(X_1 + X_2) + 2X^2 \\
&= X_1^2 + X_2^2 - 2X^2 \\
&= X_1^2 + X_2^2 - \frac{(X_1 + X_2)^2}{2} \\
&= \frac{(X_1 - X_2)^2}{2}
\end{aligned}$$

又因为  $X_1, X_2$  独立且服从标准正态分布, 所以, 我们有  $X_1 + X_2, X_1 - X_2$  均服从正态分布, 我们令  $Y_1 = X_1 + X_2, Y_2 = X_1 - X_2$ , 有

$$\begin{aligned}
\text{cov}(Y_1, Y_2) &= \text{cov}(X_1 + X_2, X_1 - X_2) \\
&= \text{Var}(X_1) - \text{Var}(X_2) = 0
\end{aligned}$$

所以  $Y_1 = X_1 + X_2, Y_2 = X_1 - X_2$  独立

所以关于  $Y_1$  的函数与关于  $Y_2$  的函数独立, 即:

$X$  与  $(X_1 - X)^2 + (X_2 - X)^2$  独立

3、如果存在趋于零的正数列  $\{\xi_n\}$  使得

$$\sum_n P(|X_n - X| > \xi_n) < \infty$$

那么  $X_n$  几乎处处收敛与  $X$ 。

解：因为  $\{\xi_n\}$  趋向于 0

则对于任意的  $\xi > 0$ ，均存在一个整数  $N$ ，使得当  $n > N$  时，有  $\xi_n < \xi$  成立。

所以，对于任意的  $\xi > 0$ ，有

$$\begin{aligned} \sum_n P(|X_n - X| > \xi) &= \sum_{n=0}^N P(|X_n - X| > \xi) + \sum_{n=N}^{\infty} P(|X_n - X| > \xi) \\ &< A + \sum_{n=N}^{\infty} P(|X_n - X| > \xi_n) \quad (\text{其中 } A \text{ 为一个有限数, } = \sum_{n=0}^N P(|X_n - X| > \xi)) \\ &< A + \sum_n P(|X_n - X| > \xi_n) \\ &< \infty \end{aligned}$$

所以  $X_n$  几乎处处收敛与  $X$

4、硬币的正反面分别记为 1, 0, 连续掷一个硬币得到一个 01 序列，求在这个序列中，(1) 11 首次出现的平均时间，(2) 01 首次出现的平均时间

解：一般地，我们假设硬币正面的概率为  $p$ ，反面的概率为  $q$ ，有  $p+q=1$ 。

根据全概率公式，有：

$$\begin{aligned} E(T_{11}) &= E(T_{11}|1)p + E(T_{11}|0)q \\ &= p(E(T_{11}|11)p + E(T_{11}|10)q) + (1 + E(T_{11}))q \\ &= 2p^2 + pq(2 + E(T_{11})) + (1 + E(T_{11}))q \\ &= 2p^2 + 2pq + pqE(T_{11}) + q + qE(T_{11}) \end{aligned}$$

$$\text{所以，有 } E(T_{11}) = \frac{2p^2 + 2pq + q}{1 - pq - q} = \frac{1+p}{p^2}$$

$$E(T_{01}) = E(T_{01}|1)p + E(T_{01}|0)q$$

$$\begin{aligned}
&= p(1 + E(T_{01})) + q(pE(T_{01}|01) + qE(T_{01}|00)) \\
&= p + pE(T_{01}) + 2qp + q^2E(T_{01}|00) \\
&= p + pE(T_{01}) + 2qp + 3q^2p + q^3E(T_{01}|000) \\
&= \dots \\
&= pE(T_{01}) + p + 2qp + 3q^2p + 4q^3p + 5q^4p + \dots + nq^{n-1}p + \dots
\end{aligned}$$

$$\text{令 } S_n = p + 2qp + 3q^2p + 4q^3p + 5q^4p + \dots + nq^{n-1}p + \dots$$

$$qS_n = pq + 2qp^2 + 3q^3p + 4q^4p + 5q^5p + \dots + nq^n p + \dots$$

$$\text{有: } S_n - qS_n = p + qp + q^2p + q^3p + q^4p + \dots + q^{n-1}p + \dots$$

$$pS_n = \frac{p}{1-q} = 1, \text{ 得到 } S_n = \frac{1}{p}, \text{ 将其带入上面的式子:}$$

$$E(T_{01}) = pE(T_{01}) + \frac{1}{p}$$

$$E(T_{01}) = \frac{1}{p(1-p)}$$

UnRegistered