作业：11210180063 汪敏

一：已知 So=a, $Sn = So + \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n$，且有$\xi_1$、$\xi_2 \cdots \xi_n$独立同分布，其分布函数为：

$$P(\xi_i) = \{^{\frac{1}{2}, \xi_i = 1}_{\frac{1}{2}, \xi_i = -1}$$

令 $Xn = Sn$

证明：$Yn \hat{=} Xn^2 - n$ 是关于鞅流的鞅。

证明：

$E\left(Y_n - Y_{n-1} \middle| X_1, X_2 \cdots X_{n-1}\right)$

$= E\left(X_n{}^2 - X_{n-1}{}^2 - 1 \middle| X_1, X_2 \cdots X_{n-1}\right)$

$= E\left(\left(X_{n-1} + \xi_n\right)^2 - X_{n-1}{}^2 - 1 \middle| X_1, X_2 \cdots X_{n-1}\right)$

$= E\left(2X_{n-1}\xi_n + \xi_n{}^2 - 1 \middle| X_1, X_2 \cdots X_{n-1}\right)$

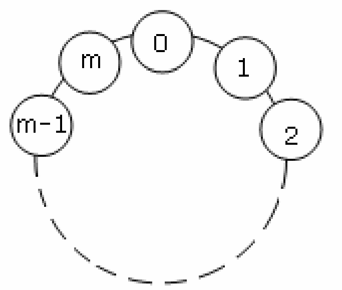
$= 2X_{n-1}E\left(\xi_n \middle| X_1, X_2 \cdots X_{n-1}\right) + E\left(\xi_n{}^2 \middle| X_1, X_2 \cdots X_{n-1}\right) - 1$（根据信息 X_{n-1} 属于信息流 $X_1, X_2 \cdots X_{n-1}$）

$= 2X_{n-1}E\left(\xi_n\right) + E\left(\xi_n{}^2\right) - 1$（根据$\xi_n$与信息流$X_1, X_2 \cdots X_{n-1}$独立）

=0+1-1=0

所以有 $Yn \hat{=} Xn^2 - n$ 是关于鞅流的鞅。

二、如图所示，假设一个圆形的城市有 m 个城门，分别命名为 0,1,2…，m，一个人从城门 0 出发，用仍硬币的方法决定走的方向，每次当硬币为正面时，顺时针到下一个城门，每当硬币为反面时，逆时针到下一个城门，到走遍所有的城门时，从城门走出；
问：这个人从 i 号门出来的概率。



解:假设这个人从 i 号门出来的概率为 P_i（i=1,2…n）,根据对称性，有 $P_i = P_{m+1-i}$。（遍历的最后一次不可能是门 0，故而 $P_0 = 0$）。

讨论 P_2：

若从 0 开始，走遍所有的城门，最后从城门 2 出来，其概率可以认为从 0 开始第一步到 1，然后算从 1 遍历到 2（$=P_1$，其概率和从 0 遍历到 1 的概率相同），加上从 0 开始第一步到 m，

然后算从 m 遍历到 2（$=P_3$，其概率和从 0 遍历到 3 相同，因为还是必须经过城门 1，过程中必须经过城门 0，如果一个新的遍历），故而，有：

$$P_2=\frac{1}{2}P_1+\frac{1}{2}P_3 \qquad (1)$$

同理，有：

$$P_3=\frac{1}{2}P_2+\frac{1}{2}P_4$$

$$P_4=\frac{1}{2}P_3+\frac{1}{2}P_5$$

…

$$P_{m-2}=\frac{1}{2}P_{m-1}+\frac{1}{2}P_{m-3}$$

$$P_{m-1}=\frac{1}{2}P_{m-2}+\frac{1}{2}P_m$$

相加得：

$$P_2+P_3+\cdots+P_{m-2}+P_{m-1}=\frac{1}{2}P_1+\frac{1}{2}P_2+P_3+\cdots+P_{m-2}+\frac{1}{2}P_{m-1}+\frac{1}{2}P_m$$

$$P_2+P_{m-1}=\frac{1}{2}P_1+\frac{1}{2}P_2+\frac{1}{2}P_{m-1}+\frac{1}{2}P_m$$

然后根据对称性：$P_2=P_{m-1}$，$P_1=P_m$

有：$P_2+P_2=P_1+P_2$，即 $P_1=P_2$ （2）

把（2）带入（1），有 $P_1=P_3$

同理，有 $P_1=P_2=\cdots=P_{m-1}=P_m$

又 $P_1+P_2+\cdots+P_{m-1}+P_m=1$

故而 $P_1=P_2=\cdots=P_{m-1}=P_m=\frac{1}{m}$